Тема: Матрицы. Определители.

План.

1. Матрица. Понятие и определение. Виды матриц.
2. Элементарные преобразования над матрицами.
3. Операции над матрицами
    - сложение матриц
    - умножение матриц на число
    - умножение матриц
    - транспонирование матриц
4. Определители 2-го и 3-го порядка.
5. Свойства определителя.

1. МАТРИЦА. ПОНЯТИЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ВИДЫ МАТРИЦ.

Матрицей порядка m на n (m;n) называется таблица из m×n чисел.
Общий вид прямоугольной матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$, где m-количество строк, n-количество столбцов матрицы.

a_{ij}-элемент матрицы A. i,j – индексы элемента: i-номер строки, j-номер столбца. Элемент a_{ij} матрицы A находится на их пересечении.

Пример:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & -7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$ - матрица порядка 3 на 4. Элемент $a_{22}=4$.

Матрица, у которой количество строк равно количеству столбцов называется ***квадратной.***

Квадратная матрица порядка n $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Элементы $a_{11}\,a_{22}\dots a_{nn}$- образуют ***главную диагональ*** матрицы, а элементы $a_{1n}\,a_{2n-1}\dots a_{n1}$- ***побочную диагональ*** матрицы

Пример:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$ - квадратная матрица порядка 3×3.

Главная диагональ – 1,4,3, побочная – 2,4,-1.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой.***

Пример:

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ -нулевая матрица порядка 2×4.

Матрица, все элементы которой, кроме главной диагонали равны нулю, а на главной диагонали стоят единицы, называется ***единичной.***

Пример:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ - единичная матрица третьего порядка.

Матрица называется ***ступенчатой***, если она удовлетворяет двум условиям:

1. В каждой ее строке есть хотя бы один элемент, отличный от нуля элемент.
2. Первый отличной от нуля элемент каждой строки, начиная со второй, находится ***правее*** первого отличного от нуля элемента предыдущей строки.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НАД МАТРИЦАМИ.

Элементарные преобразования над матрицами.

1. Транспозиция – это перемена местами двух строк (столбцов) матрицы.

2. Умножение строки (столбца) на любое число, не равное нулю.

3. Прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на некоторое число.

4. Вычеркивание нулевых строк (столбцов).

Теорема. С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к ступенчатому виду (метод Гаусса).

Пример: привести матрицу к ступенчатому виду.

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$. Поменяем местами первую и третью строки матрицы. Затем первую строку умножим на (3) и прибавим ко второй, далее умножим первую на (5) и прибавим к третьей. Решение оформляем следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(3) & \cdot(5) \\ & \\ & \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 14 \\ 0 & -10 & 17 \end{pmatrix} \cdot(-5) \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 14 \\ 0 & 0 & -53 \end{pmatrix}$$

3. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ.

1. Сложение матриц.

Суммой двух однотипных матриц A и B называется матрица C=A+B, у которой элемент c_{ij} является суммой соответствующих элементов матриц A и B, т.е. $\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$

Пример: Даны матрицы A и B. Найти их сумму. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы А на число называется матрица С= λ А, у которой каждый элемент c_{ij} равен произведению соответствующего элемента матрицы А на число λ, т.е. $\boxed{c_{ij} = \lambda * a_{ij}}$

Пример: Дана матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найти матрицу *C=3·A*

$$C = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

3. Умножение двух матриц.

!!!!! Операция умножения двух матриц определяется ***не для любых*** матриц А и В, а лишь для тех, которые удовлетворяют следующему условию: число столбцов матрицы А должно быть равно числу строк матрицы В.

Произведением матрицы А типа (m, **n**) на матрицу В (**n**, к) называется матрица ***С (m, к),*** элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-той строки матрицы А на соответствующий элемент j-того столбца матрицы В.

Пример: Даны матрицы А и В. Найти их произедение. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Порядок матриц А(2,**3**), В(**3**,2), следовательно матрица С будет порядка (2,2).

$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 22 \end{pmatrix}$. Например, элемент c_{22} получается как сумма произведений элементов 2-й строки матрицы А на элементы 2-го столбца матрицы В, т.е. $c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 5 = 22$

Свойства произведения

1. $A \times B \neq B \times A$
2. $A \times E = E \times A = A$

4. Транспонирование матриц.

Матрица A^T называется ***транспонированной*** по отношению к матрице А, если столбцы матрицы А являются строками матрицы A^T.

Пример: $B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Транспонированная матрица $B^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-ГО И 3-ГО ПОРЯДКА

Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

<u>Определителем (детерминантом) 2-го порядка</u> соответствующим матрице А называется число, разности произведений элементов, стоящих на главной и побочной диагоналях.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Пример: Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

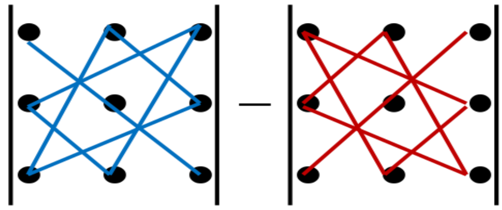
$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) = 10$$

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

<u>Определителем 3-го порядка,</u> соответствующим матрице А называется число, вычисляемое по формуле

$$\boxed{\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}}$$

Чтобы запомнить эту формулу, используют правило треугольника (правило Саррюса)



Пример: Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 7 + (-2) \cdot 0 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) \cdot 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - (-2) \cdot 5 \cdot 7 - 0 \cdot (-1) \cdot 3 = 21 + 0 - 20 - 8 + 70 - 0 = 63$$

5. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.

1. Определитель не меняется при транспонировании. Поэтому в дальнейшем большинство свойств формулируется и доказывается для строк.

2. Если две строки определителя поменять местами, то определитель меняет знак.

3. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

4. Если все элементы какой-либо строки (столбца) имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

5. Если в определителе две строки (два столбца) одинаковы или пропорциональны, то определитель равен нулю.

6. Определитель не изменяется, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число (в результате элементарных преобразований Гаусса).

7. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Даны матрицы А и В. Найти матрицу С=2А+В. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Даны матрицы А и В. Найти С=5А-В. $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Даны матрицы А и В. Найти С=3А-2В. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} -4 & 3 & -5 & 8 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Дана матрица А. Найти матрицу С=А+λЕ, где λ=3. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

5. Найти произведение матриц:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -3 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} a & -a & a \\ 1 & 1 & 1 \\ -a & a & -a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -a & 1 & a \\ a & 1 & -a \\ -a & 1 & a \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 12) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; 13) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Привести матрицу к ступенчатому виду:

1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -3 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. Вычислить определители матриц:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x & x+1 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 10 & 3 & 16 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ 7) $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 8)

$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ 9) $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & -a \\ a & a & x \end{vmatrix}$ 10) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ 11) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ 12) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$ 13) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ 14)

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ 15) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$