Вероятность случайного события.

Событие называется случайным, если в результате данного испытания оно может либо произойти, либо не произойти. Обозначение А, В, С….

Пример: в ящике цветные шары. Вытаскивают 1 шар – это испытание, появление шара определенного цвета – событие.

Чем больше количество этих событий, тем отчетливее проявляются закономерности, и тем более достоверно может быть предсказан результат. Эти закономерности называется статистическими, они имеют объективный характер, присущий всем явлениям внешнего мира.

- **Классическая вероятность** Р(А) события А –это отношение числа благоприятствующих этому событию исходов m, к общему числу всех элементарных событий n.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

- **Статистическая вероятность** $P^*(A)$ события А – это предел отношения числа испытаний, в котором событие А произошло, к общему числу испытаний.

$$P^*(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$$

Алгебра событий.

а) теорема сложения вероятностей

Суммой двух событий А и В является событие, которое заключается в появлении события А или В.

Если события несовместимы, то вероятность появления одного из двух событий равна сумме вероятностей этих событий и определяется по формуле:

$$P(A + B)= P(A) + P(B)$$

Следствия:

1. Сумма вероятностей событий A_1, A_2….образующих полную группу равна единице.

$$P(A_1) + P(A_2)+\dots P(A_n)=1$$

2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A) + \overline{P(A)}=1$$

Задача: В ящике 4 белых + 2 красных + 8 зеленых + 3 черных. Извлекают 1 шар, какова вероятность, что шар цветной?

Решение: $P(A+B+C)= \frac{13}{17}$

Задача:

Аптека получает медикаменты из пункта А, В, С. Вероятность поступления лекарства из А=0,7 , из В=0,2. Найти вероятность того, что медикаменты получены из С.

Решение:

События образуют полную группу 0,7+0,2+ Р(С)=1 $\rightarrow$ Р(С)=0,1

Если события совместимы, то вероятность появления хотя бы одного из двух этих событий равна сумме вероятностей без вероятности их совместного появления.

$$\mathbf{P(A + B)= P(A) + P(B) - P(A \cdot B)}$$

Задача: : Из колоды карт вытаскиваем 1 карту, какова вероятность вынимания либо черной масти, либо дамы.

Решение:

n=36 А-событие вынимания черной масти

В- событие вынимания дамы

$$P(A+B) = \frac{1}{2} + \frac{4}{36} - \frac{2}{36} = \frac{20}{36}$$

б) теорема произведения вероятностей

Произведением двух событий А и В является событие С, которое заключается в одновременном появлении события А и В.

Если события независимые

$$\mathbf{P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)}$$

Задача: Медсестра обслуживает в палате 4-х больных. Вероятность того, что 1-му больному потребуется внимание в течении часа =0,2; Р(В)=0,3; Р(С)=0,25; Р(D)=0,1. Найти вероятность что всем больным потребуется помощь.

Решение:

Р(А и В и С и D) = 0,2·0,3·0,25·0,1=0,0015

Если события зависимые:

Р(А · В)=Р(А) · Р(В/А)

Р(В/А)-условная вероятность(вероятность события В при условии что событие А уже произошло)

Задача: В ящике 10 шаров(4 белых и 6 черных), вынимают подряд два шара. Какова вероятность, что оба шара белые?

Решение:

Р(А · В)=Р(А) · Р(В/А)= 4/10·3/9=4/30

Вероятность появления хотя бы одного события.

В некоторых случаях вероятность события удобно подсчитывать как вероятность противоположного другому событию.

Пусть события A_1, A_2, A_3 .... A_n независимы и известны вероятности этих событий: $P(A_1)=p_1$, $P(A_2)=p_2$, $P(A_3)=p_3$,........... $P(A_n)=p_n$,

Обозначим вероятности противоположных событий:

$P(\overline{A}_1)=q_1,\ P(\overline{A}_2)=q_2,\quad P(\overline{A}_3)=q_3,\ \ldots\ldots\ldots.P(\overline{A}_n)=q_n,$

Найдём вероятность того, что ни одно из событий в опыте не наступит:

$P(B)=q_1\cdot q_2\cdot q_3\cdot\ \ldots\ldots q_n$

В этом случае искомая вероятность, т.е. вероятность появления хотя бы одного события, определяется как вероятность противоположного события:

$P(\overline{B})=1-P(B)=1-q_1\cdot q_2,\cdot q_3,\cdot\ldots\ldots q_n,$

Задача: Студент отвечает на 4 дополнительных вопроса при сдаче экзамена. Вероятность правильного ответа на каждый вопрос 1/4. Предполагая, что все ответы — события независимые, найти вероятность того, что будет дано хотя бы два правильных ответа.

Решение: B = *{хотя бы два правильных ответа}* — это 2, 3 или 4.

Так как P(A) = 1/4, то $P(\overline{A})$ = 1 - 1/4 = 3/4 — вероятность неправильного ответа на вопрос. Эту задачу удобно решать, используя противоположные события, т.е. пользуясь равенством:

$P(B)=1-[P_4(0)+P_4(1)]$

$P_4(0)=C^0_4\cdot P^0\cdot(1-P)^4=0{,}32$

$P_4(1)=C^1_4\cdot P^1\cdot(1-P)^{4-1}=0{,}42$

$P(B)=1-[P_4(0)+P_4(1)]=1-(0{,}32+0{,}42)=0{,}26$

Ответ: P(B)=0,26

Формула полной вероятности и формула Байеса.

Определение: Набор попарно несовместимых событий $\boldsymbol{H_1, H_2, \ldots H_n}$, сумма которых составляет достоверное событие, называется *полной группой событий*.

Теорема 1(формула полной вероятности).

Пусть события $\boldsymbol{H_1, H_2, \ldots H_n}$ являются полной группой событий. Тогда для любого события A: $\mathbf{P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)}\boldsymbol{P(A/H_i)}$

Формула Байеса.

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(H_j)\cdot P_{H_j}(A)}$$

где **A** -рассматриваемое событие

H_i- гипотеза

j-количиство гипотез

$P(H_i)$-вероятность i-той гипотезы (доопытная)

$P_{H_i}(A)$- условная вероятность события **A** при соответствующей гипотезе

$P_A(H_i)$- послеопытная вероятность i-той гипотезы

Задача:

Команда на хорошем поле выигрывает с вероятностью 2/3 , а на плохом – с вероятностью ½. Известно, что ¾ игр проводится на хорошем поле. Какова вероятность выиграть в наудачу выбранном матче?

Решение: Введем события А=$\{$***выигрыш***$\}$,

$\boldsymbol{H_1} = \{$***плохоеполе***$\}$,

$\boldsymbol{H_2} = \{$***хорошееполе***$\}$.

По условиям задачи: Р(А/$\boldsymbol{H_1}$)=2/3 , Р(А/$\boldsymbol{H_2}$) =1/2,

Р($\boldsymbol{H_1}$)=3/4 , Р($\boldsymbol{H_2}$)=1/4⇒

Р(А)=2/3*3/4+1/2*1/4=5/8.

Задача:

Установлено, что курящие мужчины в возрасте свыше 40 лет умирают от рака легких в 10 раз чаще, чем некурящие мужчины. В предположении, что 60% этой популяции курящие, какова вероятность того, что мужчина, умерший от рака легких, был курящим?

Решение: Пусть H_1- мужчина курящий, $P(H_1)=0.6$

H_2- мужчина не курящий $P(H_2)=0.4$

А- событие заключающееся в том, что мужчина, умер от рака лёгких.

$P_{H1}(A)=10P_{H2}$-по условию задачи.

Рассчитывают вероятность того, что мужчина, умерший от рака лёгких, был курящий.

$$P_A(H_1) = \frac{0.6 \cdot 10 \cdot P_{H_2}(A)}{0.6 \cdot 10 \cdot P_{H_2}(A) + 0.4 \cdot P_{H_2}(A)} = \frac{6}{6.4} = \frac{15}{16}$$

Рассчитывают вероятность того, что мужчина, умерший от рака лёгких, был некурящий.

$$P_A(H_2) = \frac{0.4 \cdot P_{H_2}(A)}{0.6 \cdot 10 \cdot P_{H_2}(A) + 0.4 \cdot P_{H_2}(A)} = \frac{0.4}{6.4} = \frac{1}{16}$$

Проверка: 15/16 +1/16 =1, следовательно задача решена верно.

Ответ: $P_A(H_1)=15/16$; $P_A(H_2)= 1/16$

Задачи для самостоятельного решения по теории вероятности.

1. При обследовании 300 студентов путём флюорографии были выявлены следующие заболевания: у 5 человек- плеврит, у 8-остаточные явления после

пневмонии. Найти вероятности этих заболеваний, выявленных с помощью флюорографии.

2. Аптечный склад получает медикаменты с медицинских предприятий 3-х городов А, В и С. Вероятность получения медикаментов из города А Р(А)=0.6, из города В Р(В)=0.3. Найти вероятность того, что медикаменты получены из города С.

3. На клумбе растут 20 красных, 30 синих и 40 белых астр. Какова вероятность сорвать в темноте цветную астру, если срывают одну астру?

4. В марте 7дней шел снег, 10 – дождь, из них 4дня – снег с дождем. Найти вероятность того, что в наугад выбранный день шел дождь или снег.

5. Вероятность хотя бы одного вызова врача в течение часа Р=0.7. Найти вероятность того, что в течение часа не последует вызова.

6. В большой популяции плодовой мушки 25% мух имеют мутацию глаз, 50%- мутацию крыльев, а 40% мух с мутацией глаз имеют и мутацию крыльев. Какова вероятность того, что у мухи, наудачу выбранной из этой популяции, окажется либо мутация глаз, либо мутация крыльев?

7. Медицинская сестра обслуживает в палате четырёх больных. Вероятность того, что в течение часа внимания сестры потребует первый больной - Р(А)=0.2, второй больной-Р(В)=0.3, третий-Р(С)=0.25, четвёртый больной-Р(Д)=0.1. Найти вероятность того, что в течение часа все больные потребуют внимания медсестры.

8. Представим, что в группе из 10 человек есть четверо мужчин. Если случайным образом выбирают двух человек, то какова вероятность, что:
оба-мужчины;
2) обе-женщины;
3) один- мужчина и одна –женщина.

9. Вероятность попадания в опухолевую клетку «мишень» первого радионуклида равна P_1=0.7, а второго-P_2=0.8.Найти вероятность попадания в клетку – «мишень», если бы одновременно использовались оба препарата.

10. Три врача независимо друг от друга осмотрели одного и того же больного. Вероятность того, что первый врач допустит ошибку при установлении диагноза, равна 0.01. Для второго и третьего врачей эта вероятность соответственно 0.015 и 0.02. Найти вероятность того, что при осмотре хотя бы один из врачей допустит ошибку в диагнозе.

11. В контрольно-аналитической лаборатории имеются три измерительных прибора. Вероятность того, что приборы работают в данный момент времени, равна соответственно p_1=0,8; p_2=0,9; p_3=0,95. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы один прибор.

12. В клетке 6 белых и 4 серые мыши. Случайно выбирают 3-х мышей, не возвращая их обратно. Вычислить вероятность событий:

A) все три мыши белые
B) две белые и одна серая
C) две серые и одна белая
D) все три серые

13 Эффективность вакцины в формировании иммунитета составляет 75%. Вакцинировалось 2 животных. Найдите вероятность случайных событий:

A) оба животных приобрели иммунитет
B) одно животное приобрело иммунитет
C) ни одно животное не приобрело иммунитет

14 Вероятность брака при изготовлении детали равна 0,04. Приемка деталей производится по следующей системе контроля: годная деталь принимается с вероятностью 0,98, а бракованная – с вероятностью 0,1. Найти вероятность приемки детали.

15 Имеются три одинаковых ящика с шарами. В первом ящике 30 белых и 20 чёрных шаров, во втором -15 белых и 15 чёрных шаров, в третьем – 5 белых и 15 чёрных шаров. Какова вероятность вытащить из случайно выбранного ящика чёрный шар.

16 На автозавод поступили двигатели от трёх моторных заводов. От первого завода поступи 10 двигателей, от второго-6 и от третьего-4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8 ; 0,7. Какова вероятность того, что:
а) установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока;
б) проработавший без дефекта двигатель изготовлен на первом заводе, на втором заводе?

17 На предприятии, изготавливающем замки, первый цех производит 25, второй 35, третий 40% всех замков. Брак составляет соответственно 5,4 и 2%.
а)Найти вероятность того, что случайно выбранный замок является дефектным.
б)Случайно выбранный замок является дефектным. Какова вероятность того, что он был изготовлен в первом, втором, третьем цехе?

18 Трое рабочих изготавливают однотипные изделия. Первый рабочий изготовил 40 изделий, второй - 35, третий - 25. Вероятность брака у первого

рабочего 0,03 , у второго - 0,02 , у третьего - 0,01. Взятое наугад изделие оказалось бракованным. Определить вероятность того, что это изделие сделал второй рабочий.

19 На предприятии работают две бригады рабочих: первая производит в среднем ¾ продукции с процентом брака 4%, вторая – ¼ продукции с процентом брака 6%. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие:
а)Окажется бракованным;
б)Изготовлено второй бригадой при условии, что изделие оказалось бракованным.

20 В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношение 2:3. Вероятность качественного ремонта для сапог равна 0,9, а для туфель – 0,85. Проведена проверка качества одной пары обуви. Оказалось, что эта пара обуви отремонтирована качественно. Какова вероятность того, что
а) сапоги, б) туфли?

21 Лабораторное животное либо здорово (с вероятностью 0.9), либо нет. Если животное здорово, то оно может выполнить некоторое задание в 75% всех попыток. Если животное нездорово, то оно способно выполнить это задание лишь в 40% всех попыток. Допустим, что предпринимается попытка и животное справилось с заданием. Какова вероятность того, что животное здорово?

22 Вакцина формирует иммунитет у животных против туберкулеза в 95% случаев. Вакцинировалось 30% животных. Вероятность заболеть туберкулезом у вакцинированного животного без иммунитета такая же, как у не вакцинированного. Какова вероятность того, что животное, заболевшее туберкулезом, было вакцинировано?

23 В некоторой большой популяции число черноволосых и рыжих одинаково. Замечено, что у 30% людей с черными волосами глаза голубые, так же, как и у 50% людей с рыжими волосами. Из тех, у кого черные или рыжие волосы, случайно выбирают одного человека и оказывается, что у него голубые глаза. Какова вероятность того, что у этого человека черные волосы?

24 В одной большой частной лечебнице согласно оценкам 50% мужчин и 30% женщин имеют серьезные нарушения сердечной деятельности. В этой лечебнице женщин вдвое больше, чем мужчин. У случайно выбранного пациента оказалось серьезное нарушение сердечной деятельности. Какова вероятность, что этот пациент мужчина?

25 Установлено, что в среднем один из 700 детей рождается с лишней Y-хромасомой и что у таких детей крайне агрессивное поведение встречается в 20 раз чаще. Опираясь на эти данные представьте, что у мальчика крайне агрессивное поведение. Какова вероятность, что он имеет лишнюю Y-хромосому?

26 Большая популяция людей разбита на 2 группы одинаковой численности. Диета одной группы отличалась высоким содержанием ненасыщенных жиров, а диета контрольной группы была богата насыщенными жирами. После 10 лет пребывания на этих диетах возникновение сердечно-сосудистых заболеваний составило в этих группах 31% и 48%. Случайно выбранный из популяции человек имеет сердечно-сосудистое заболевание. Какова вероятность того, что этот человек принадлежит к контрольной группе?

27 Предположим, что в некоторой большой популяции мужчин и женщин поровну. В этой популяции 5% мужчин и 0.25% женщин страдают дальтонизмом. Случайным образом выбирают одного дальтоника. Какова вероятность, что этот человек-мужчина?

28 Краснуха может оказаться причиной серьёзных врождённых пороков развития у детей, если мать заболевает ею на ранних стадиях беременности. Вероятность пороков оценивается как 45%, 20% и 5%, если заболевание происходит соответственно на первом, втором и третьем месяцах беременности. Предположим, что вероятность заболеть краснухой одна и та же на любом месяце беременности и что ребёнок рождается с серьёзными пороками по причине краснухи. Какова вероятность, что мать заболела краснухой на первом месяце беременности?

29 Некоторое заболевание, встречающееся у 5% населения, с трудом поддаётся диагностике. Один грубый тест на это заболевание даёт положительный результат в 60% случаев, когда пациент действительно болен, и в 30% случаев, когда у пациента нет этого заболевания. Пусть для конкретного пациента этот тест даёт положительный результат. Какова вероятность, что у него есть это заболевание?

30 Два автомата производят одинаковые хирургические зажимы. Производительность первого автомата вдвое больше, чем второго. Первый автомат производит в среднем 60% зажимов отличного качества, а второй-84%. Наудачу взятый зажим оказался отличного качества. Найти вероятность того, что он произведён первым автоматом.